Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación
y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III
CI-2523 Sep-Dic 2010

> Ilusiona pensar que se conoce alguna cosa cuando se tiene una formulación matemática de lo que acaece; solo se ha «indicado, descrito», nada más.
>
> La voluntad de poder, Federico Nietzsche.

Tarea Especial

1. Demuestre que si $h(n)$ es solución de la ecuación $x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} = f_n$, entonces toda solución de esta ecuación es de la forma $U_n + h(n)$ donde U_n es una solución de la ecuación homogénea asociada.

2. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencia lineales con coeficientes constantes.
   a) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = f_n \quad n \geq 2, \quad f_n = 2^n n \quad x_0 = 0, x_1 = 2$
   b) $x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = f_n \quad n \geq 2, \quad n3^n + 1 \quad x_0 = 0, x_1 = 1$
   c) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = f_n \quad n \geq 2; \quad f_n = 3^n, f_n = 2^n + 1, f_n = n + 1 \quad x_0 = 0, x_1 = 1$

3. Use el método de la función generatriz para resolver las siguientes recurrencias:
   a) $x_n + x_{n-1} + 2^n = 0 \quad n \geq 2; \quad x_0 = 1, x_1 = 1$
   b) $y_n = 4y_{n-1} - 4y_{n-2} + n \quad n \geq 2; \quad y_0 = 1, y_1 = 2$

4. Resuelva la recurrencia

$$\begin{aligned} x_0 &= 1; \\ x_n &= x_{n-1} + 2x_{n-2} + \cdots + nx_0, \qquad \text{si } n > 0 \end{aligned}$$

5. Demuestre que si λ_1 es la única solución a la ecuación característica de la ecuación homogénea

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} = 0, \tag{1}$$

   entonces las sucesiones λ_1^n y $n\lambda_1^n$ son soluciones linealmente independientes de (1) y generan al espacio de soluciones de (1), esto es, toda solución de (1) se puede escribir como combinación lineal de λ_1^n y $n\lambda_1^n$. Concluya que forman una base para el espacio de soluciones de (1).

6. Demuestre que los operadores Δ y E son lineales y conmutan

7. *a*) Construya la tabla de diferencias finitas de la función $k^3 - 3k$.
   b) Escriba $k^3 - 3k$ como combinación lineal de coeficientes binomiales usando la fórmula $f(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^i f(0)$
   c) Halle el valor de la suma $\sum_{k=0}^{n} k^3 - 3k$ usando el desarrollo anterior.

8. Exprese como suma de funciones factoriales (Use h adecuado)

   (a) $(3x+1)(3x+4)(3x+7)$ (b) $2x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 3$ (c) $\frac{3}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}$
   (d) $\frac{x^2+3}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ (e) $\frac{1-x}{(x+1)(x+3)(x+4)}$ (f) $\frac{2x+1}{(3x-2)(3x+4)(3x+7)}$

9. Halle la $n-$ésima diferencia de las siguientes funciones con $h = 1$

(a) $\frac{1}{2x+1}$ (b) $2^x x^3$ (c) $x2^x$
(d) H_n (e) x^n (f) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

10. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia usando el método las funciones generatrices:

$$\begin{cases} x_n = 2y_{n-1} - x_{n-1}, & \text{si } n > 0,\ x_0 = 0; \\ y_n = x_n + x_{n-1} + 1, & \text{si } n > 0,\ y_0 = 0. \end{cases}$$

11. Pruebe la siguiente fórmula

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(k) = (-1)^n \Delta^n f(0)$$

y úsela para hallar el valor de

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k^2 2^k \ .$$

12. Use el Teorema de Sumación por Partes para hallar las siguientes sumas indefinidas

(a) $\sum x^2 2^x$ (b) $\sum x^2 H_x$ (c) $\sum \binom{x}{m} H_x \quad m \in I\!N; \quad h = 1$

13. Use la siguiente fórmula

$$\sum \beta^k P(k) = \frac{\beta^k}{\beta - 1} \left[1 - \frac{\beta \Delta}{\beta - 1} + \frac{\beta^2 \Delta^2}{(\beta - 1)^2} - \cdots \right] P(k)$$

y el teorema fundamental del cálculo de sumas para evaluar las siguientes sumas

(a) $\sum_{k=1}^{n} 3^k (k^2 - k)$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 2^k$ (c) $\sum_{k=1}^{n} k^{(2)} 2^k$

14. Exprese $2x^3 - 3x + 4$ como potencias factoriales de x, $x - 2$ y de $2x + 4$

15. Halle el valor de la suma de los n primeros términos de las siguientes sumas

(a) $\frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{6}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots$ (b) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots$

16. Hallar el valor de las siguientes sumas impropias

(a) $\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots$ (c) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 8} + \cdots$

Si yo amo el mar y todo lo que es como el mar, y le amo más cuando colérico me contradice: Si dentro de mí se agita aquel placer del que hincha sus velas en busca de lo desconocido, y me gustan los viajes del navegante: Si jamás gritó mi alegría: "La costa desaparece: he roto mi última cadena; la inmensidad me rodea; el tiempo y el espacio brillan lejos de mí. ¡Vamos! ¡En marcha, viejo corazón!", ¡Oh, cómo no he de sentir anhelos de eternidad y del anillo nupcial de los anillos: el anillo del Eterno Retorno! Nunca encontré la mujer de quien quisiera tener hijos, a no ser la mujer a quien yo amo: ¡pues yo te amo, eternidad! ¡PUES YO TE AMO ETERNIDAD!

Así habló Zaratustra. Federico Nietzsche.